

I/ LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI:

Các bài toán về phương trình nghiệm nguyên là những bài toán khó. Đường lối chung để giải phương trình này là dựa vào đặc điểm của phương trình để thu hẹp miền chứa nghiệm.

Để phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động trong học tập của mỗi học sinh, đối với mỗi dạng toán này cũng như việc tạo ra sự hứng thú say mê học tập của các em là việc rất cần thiết của các thầy cô giáo dạy toán. Do vậy tôi muốn trao đổi kinh nghiệm về một số phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên hay gặp trong chương trình toán cấp 2 mà tôi đã làm.

II/ MỤC ĐÍCH:

Giúp học sinh nắm được một số phương pháp cơ bản để giải phương trình nghiệm nguyên.

III/ NHIỆM VỤ:

- Đưa ra các phương pháp và ví dụ minh họa
- Rút kinh nghiệm

IV/ ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU:

- Đối tượng: các tài liệu về phương trình nghiệm nguyên
- Phạm vi nghiên cứu: các bài toán về phương trình nghiệm nguyên trong chương trình toán cấp 2.

V/ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU:

- Nghiên cứu tài liệu
- Trao đổi kinh nghiệm
- Tổng kết rút kinh nghiệm

NỘI DUNG NGHIÊN CỨU:

I/ PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT:

1/ *Phương pháp phát hiện tính chia hết:*

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x + 17y = 159$ (1)

Giải:

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình (1). Ta thấy 159 và $3x$ đều chia hết cho 3 nên $17y$ cũng chia hết cho 3, do đó y chia hết cho 3 (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt $y = 3t$ (t là số nguyên). Thay vào phương trình (1), ta được:

$$3x + 17.3t = 159$$

$$\Leftrightarrow x + 17t = 53$$

$$\Rightarrow x = 53 - 17t$$

$$\text{Do đó} \quad \begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Đảo lại thay các biểu thức của x và y vào (1) phương trình được nghiệm đúng.

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên ($x; y$) được biểu thị bởi công thức:

$$\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

2/ *Phương pháp đưa về phương trình ước số:*

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x.y - x - y = 2$

Giải:

$$\text{Ta có: } x.y - x - y = 2 \Leftrightarrow x.(y - 1) - y = 2$$

$$\Leftrightarrow x.(y - 1) - (y - 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x - 1).(y - 1) = 3$$

Do x, y là các số nguyên nên $x - 1, y - 1$ cũng là các số nguyên và là ước của 3. Suy ra các trường hợp sau:

$$\begin{cases} x-1=3 \\ y-1=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-1=-3 \\ y-1=-1 \end{cases}$$

Giải các hệ này ta có nghiệm của phương trình : (4; 2), (2; 4), (0; -2), (-2; 0)

3/ *Phương pháp tách ra giá trị nguyên:*

Ví dụ 3: Giải phương trình ở ví dụ 2 bằng cách khác

Giải:

$$\text{Ta có: } x.y - x - y = 2 \Leftrightarrow x.(y - 1) = y + 2$$

Ta thấy $y \neq 1$ (vì nếu $y=1$ thì $x.0 = 3$ vô nghiệm)

$$\text{Do đó } x = \frac{y+2}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}$$

Với $x.y = 1 \Rightarrow x=1, y=1$ thay vào (1) ta được $2+z = z$, x nguyên nên $\frac{3}{y-1}$ nguyên. $\Rightarrow y-1$ là ước của 3 $\Rightarrow y-1=3; y-1=-3; y-1=1; y-1=-1$

Ta cũng có đáp số như ở ví dụ 2

II/ PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ TỪNG VẾ:

Ví dụ 4: Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$a/ x^2 - y^2 = 1998$$

$$b/ x^2 + y^2 = 1999$$

Giải:

a/ Ta thấy $x^2; y^2$ chia cho 4 chỉ có số dư là: 0; 1

nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư là: 0; 1; 3 còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b/ Tương tự ta có $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số dư là: 0; 1; 2 còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên

Ví dụ 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$9x + 2 = y^2 + y \quad (1)$$

Giải:

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow 9x+2 = y(y+1)$

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia cho 3 dư 2 nên $y.(y+1)$ chia cho 3 cũng dư 2.

Chỉ có thể: $y = 3k+1; y+1 = 3k+2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

Khi đó: $9x+2 = (3k+1).(3k+2) \Leftrightarrow 9x = 9k.(k+1) \Leftrightarrow x = k.(k+1)$

Thử lại:

$x = k.(k+1); y = 3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình (1) có nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x = k.(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

III/ PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC:

1. Phương pháp sắp thứ tự các ẩn:

Ví dụ 6: Tìm 3 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Giải:

Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z . Ta có: $x + y + z = x.y.z \quad (1)$

Do x, y, z có vai trò như nhau ở trong phương trình (1) nên có thể sắp thứ tự các ẩn như sau:

$$1 \leq x \leq y \leq z$$

Do đó: $x.y.z = x + y + z \leq 3z$

Chia cả hai vế cho số dương z ta được: $x.y \leq 3$

Do đó: $x.y = \{1; 2; 3\}$

Với $x.y = 1 \Rightarrow x=1, y=1$ thay vào (1) ta được $2+z = z$ loại

Với $x.y = 2 \Rightarrow x=1, y=2$ thay vào (1) ta được $x = 3$

+Với $x.y = 3 \Rightarrow x=1, y=3$ thay vào (1) ta được $z = 2$ loại vì trái với sắp xếp $y \leq z$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3

2. Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn:

Ví dụ 7: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

Giải:

Do vai trò bình đẳng của x và y . Giả sử $x \geq y$, dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ y

$$\text{Ta có: } \frac{1}{y} < \frac{1}{3} \Rightarrow y > 3 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác do } x \geq y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{2}{y} \geq \frac{1}{3} \quad \text{nên } y \leq 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $3 < y \leq 6$. Do $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow y = \{4; 5; 6\}$

$$+ \text{ Với } y=4 \text{ ta được: } \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = 12$$

$$+ \text{ Với } y = 5 \text{ ta được: } \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \text{ loại vì } x \text{ không là số nguyên}$$

$$+ \text{ Với } y = 6 \text{ ta được: } \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6$$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là: (4; 12), (12; 4), (6; 6)

3/ **Phương pháp chỉ ra nghiệm nguyên:**

Ví dụ 8: Tìm số tự nhiên x sao cho $2^x + 3^x = 5^x$

Giải:

Chia hai vế cho 5^x , ta được:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \quad (1)$$

+ Với $x=0 \Rightarrow$ vế trái của phương trình (1) bằng 2 (loại)

+ Với $x = 1$ thì vế trái của phương trình bằng 1 (đúng)

+ Với $x \geq 2$ thì:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{2}{5}; \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$$

$$\text{Nên: } \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \quad (\text{loại})$$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 1$

4/ **Sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$ của phương trình bậc hai có nghiệm**

Ta viết phương trình $f(x; y) = 0$ dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn đã chọn. Chẳng hạn chọn ẩn x , khi đó y là tham số, điều kiện cần để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$, để có nghiệm nguyên còn cần phải Δ là số chính phương.

Ví dụ 9: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x+y+xy = x^2+y^2 \quad (1)$

Giải:

Phương trình (1) tương đương với: $x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0 \quad (2)$

Điều kiện để (2) có nghiệm là $\Delta \geq 0$

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 6y + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(y-1)^2 \leq 4$$

Do đó $(y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow y-1 = 0; y-1 = -1; y-1 = 1 \Rightarrow y = (0; 1; 2)$

+ Với $y = 0$ thay vào (2) ta được: $x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$

+ Với $y = 1$ thay vào (2) ta được: $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_3 = 0; x_4 = 2$

+ Với $y = 2$ thay vào (2) ta được: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_5 = 1; x_6 = 2$

Thử lại các giá trị trên nghiệm đúng với phương trình (1)

Đáp số: nghiệm của phương trình (1) là: (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2)

5/ **Sử dụng bất đẳng thức Côsi, Bunhia Copxiki:**

Ví dụ 10: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 3 \quad (1)$

Giải:

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow 3xyz = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 3\sqrt{x^4y^4z^4} = 3xyz\sqrt{xyz}$$

$$\Rightarrow xyz \leq 1 \Rightarrow x = y = z = 1$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên dương là (1; 1; 1)

IV/ PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ CHÍNH PHƯƠNG:

1. **Sử dụng tính chất chia hết của một số chính phương:**

• Các tính chất thường dùng:

1. số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8

2. Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2

3. Số chính phương chia cho 3 thì có số dư là 0; 1, chia cho 4 có số dư là 0; 1, chia cho 8 có số dư là 0; 1; 4

Ví dụ 11: Tìm các số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp

Giải:

Giả sử $9x + 5 = n(n+1)$ với n nguyên thì $36x+20 = 4n^2+4n$

$$\Rightarrow 36x+21 = 4n^2+4n+1 \Rightarrow 3(12x+7) = (2n+1)^2 \quad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow (2n+1)^2 : 3$, do 3 là số nguyên tố $\Rightarrow (2n+1)^2 : 9$

Mặt khác ta có $12x+7$ không chia hết cho 3 nên $3(12x+7)$ không chia hết cho 9

Vậy chứng tỏ không tồn tại số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

2. Tạo ra bình phương đúng:

Ví dụ 12: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+4x+2 = 21-3y^2$ (1)

Giải:

$$\text{Phương trình (1)} \quad 2(x+1)^2 = 3(7-y^2) \quad (2)$$

Ta thấy vế trái chia hết cho 2 $\Rightarrow 3(7-y^2):2 \Rightarrow 7-y^2:2 \Rightarrow y$ lẻ

Ta lại có $7-y^2 \geq 0$ (vì vế trái ≥ 0) nên chỉ có thể $y^2 = 1$.

Khi đó phương trình (2) có dạng $2(x^2+1) = 18 \Rightarrow x+1 = \pm 3 \Rightarrow x = \{-4; 2\}$.

Các cặp số (2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1) thoả mãn phương trình (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

3. Xét các số chính phương liên tiếp:

Hiển nhiên giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương. Do đó với mọi số nguyên a, x ta có:

1. Không tồn tại x để $a^2 < x^2 < (a+1)^2$

2. Nếu $a^2 < x^2 < (a+2)^2$ thì $x^2 = (a+1)^2$

Ví dụ 13: Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1) = k(k+2)$

Giải:

Giả sử $x(x+1) = k(k+2)$ với k nguyên, x nguyên dương.

$$\text{Ta có } x^2+x = k^2+2k \Rightarrow x^2+x+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên } x^2 < x^2+x+1 = (k+1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Cũng do } x > 0 \text{ nên } (k+1)^2 = x^2+x+1 < x^2+2x+1 = (x+1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2 \quad \text{Vô lí.}$$

Vậy không tồn tại số nguyên dương x để: $x(x+1) = k(k+2)$

4. Sử dụng tính chất "nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương"

Ví dụ 14: Giải phương trình với nghiệm nguyên dương: $xy=z^2$ (1)

Giải:

Trước hết ta có thể giả sử $(x, y, z) = 1$. Thật vậy nếu bộ ba số x_0, y_0, z_0 thoả mãn (1) và có ƯCLN bằng d giả sử $x_0=dx_1; y_0=dy_1; z_0=dz_1$ có ước chung bằng d thì số còn lại cũng chia hết cho d .

Ta có: $z^2=xy$ mà $(x;y)=1$ nên $x=a^2, y=b^2$ với a, b nguyên dương

$$\Rightarrow z^2=xy=(ab)^2 \text{ do đó } z=ab.$$

$$\text{Như vậy : } \begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \text{ với } t > 0 \\ z = tab \end{cases}$$

Đảo lại ta thấy công thức trên thoả mãn (1). Vậy công thức trên là nghiệm nguyên dương của (1)

5. Sử dụng tính chất: "nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0"

Ví dụ 15: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ (1)

Giải:

Thêm xy vào hai vế của phương trình (1), ta được:

$$x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1) \quad (2)$$

Ta thấy xy và $xy+1$ là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

$$\text{Nếu } xy = 0 \text{ từ (1) } \Rightarrow x^2+y^2=0 \text{ nên } x=y=0$$

$$\text{Nếu } xy+1=0 \Rightarrow xy = -1 \text{ nên } (x; y)=(1;-1) \text{ hoặc } (x;y)=(-1;1).$$

Thử các cặp số $(0;0)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$ đều là nghiệm của phương trình (1)

V/ PHƯƠNG PHÁP LUI VÔ HẠN (NGUYÊN TẮC CỤC HẠN):

Ví dụ 16: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+2y^3=4z^3$ (1)

Giải:

Từ (1) ta thấy $x \vdots 2$, đặt $x=2x_1$ với x_1 nguyên. thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được $4x_1^3+y^3=2z^3$ (2). Từ (2) ta thấy $y \vdots 2$, đặt $y=2y_1$ với y_1 nguyên thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được: $2x_1^3+4y_1^3=z^3$ (3)

Từ (3) ta thấy $z \vdots 2$ đặt $z=2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2, ta được: $x_1^3+2y_1^3=4z_1^3$ (4)

Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của (1) thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1). Trong đó $x=2x_1; y=2y_1; z=2z_1$.

Lập luận tương tự như vậy ta đi đến x, y, z chia hết cho 2^k với $k \in \mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi $x=y=z=0$

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên các phương trình sau:

- a. $5x-y=13$
- b. $23x+53y=109$
- c. $12x-5y=21$
- d. $12x+17y=41$

Bài 2: Tìm nghiệm nguyên các phương trình sau:

- a/ $1+y+y^2+y^3=t^3$
- b/ $1+y+y^2+y^3+y^4=t^4$

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau:

- a/ $5(x+y)+2=3xy$
- b/ $2(x+y)=5xy$
- c/ $3x+7=y(x-3)$

Bài 4: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$5(x+y+z+t)+10=2xyzt$$

Bài 5: Tìm 12 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Bài 6: Chứng minh rằng, với n là số tự nhiên khác 0, phương trình :

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=x_1x_2x_3\dots x_n$$

ít nhất cũng có một nghiệm trong tập hợp số tự nhiên khác 0

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$$

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau:

- a/ $4(x+y+z)=xyz$
- b/ $x+y+z+9-xyz=0$

Bài 10: Chứng minh phương trình $2x^2-5y^2=7$ không có nghiệm nguyên

Bài 11: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x^2+y^2-z^2+z+1=2(x+y-xy)$$

Bài 12: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: